

Informations - Informationen - Informazioni - Notes

STUDIORUM PROGRESSUS

Über das Hauptproblem bei konvexen Rotationskörpern

Bekanntlich bildet man die Menge aller konvexen Körper mittels der Ausdrücke

$$x = \frac{4\pi F}{M^2}; \quad y = \frac{48\pi^2 V}{M^3} \quad (1)$$

auf eine (x, y) -Ebene ab. Es entsteht das Problem, den Rand des Bildes aufzufinden¹.

Der direkte Lösungsweg besteht darin, dass man 2 der 3 Masszahlen V, F, M vorgibt und die Extrema der dritten aufsucht. Diese Methode hat bis jetzt nur in wenigen Spezialfällen zum Ziel geführt. Hier zeigt sich nun ein Ausweg: Man führt irgend zwei Hilfsgrößen a, b ein, die für konvexe Körper von Bedeutung sind, und bestimmt hernach diejenigen Körper, für welche V, F, M extreme Werte annehmen. Solche Größen sind beispielsweise *Durchmesser* und *Dicke* für allgemeine konvexe Körper, *Länge* oder *Poldistanz* und *Äquatorradius*, *Länge der erzeugenden Meridiankurve* und *Fläche des Meridian schnittes* für konvexe Rotationskörper.

Für letztere gelingt es nun, mindestens *unscharfe Bildränder* zu erhalten, was unter anderem bedeutet, dass neben den schon bekannten noch weitere Relationen zwischen den Masszahlen bestehen müssen. In der vorliegenden Arbeit werden zwei verschiedene Ansätze ausgewertet.

A. Wir betrachten diejenige Teilmenge \mathfrak{M}_1 aller konvexen Rotationskörper, deren Individuen *feste Länge* oder *Poldistanz* l und *festen Äquatorradius* r aufweisen. Diese Rotationskörper finden in einem festen Zylinder mit den charakteristischen Massen l und r Platz, und zwar berühren sie Boden und Deckel *wenigstens einpunktig*, den Mantel *mindestens in einer Kreislinie*. Unter ihnen besitzt der *Zylinder* trivialerweise die grössten, der *symmetrische Doppelkegel* aber die *kleinsten Masszahlen*. Man berechnet (mit Majuskeln bezeichnen wir fortan Maxima, mit Minuskeln Minima):

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 l; & F &= 2\pi r(r+l); \\ v &= \frac{\pi r^2 l}{3}; & f &= \pi r \sqrt{l^2 + 4r^2}; \\ M &= \pi(l+\pi r); \\ m &= \pi \left[l + \pi r - 2r \cdot \arctg \left(\frac{l}{2r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Mit Hilfe der Substitution $2r = l \cdot \operatorname{tg} \varphi$ folgt weiter:

$$\begin{aligned} x &= \frac{8 \sin \varphi}{(\pi \sin \varphi + 2 \cos \varphi)^2}; & X &= \frac{2 \sin \varphi (\sin \varphi + 2 \cos \varphi)}{(\cos \varphi + \sin \varphi \cdot \varphi)^2}; \\ y &= \frac{32 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{(\pi \sin \varphi + 2 \cos \varphi)^3}; & Y &= \frac{96 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi \cdot \varphi)^3}. \end{aligned} \quad (3)$$

$0 < \varphi \leq \pi/2$.

Die Bildpunkte von \mathfrak{M}_1 liegen also *innerhalb* oder *höchstens auf dem Rande eines festen Rechtecks* mit *achsenparallelen Seiten*, wobei ausdrücklich festzuhalten

¹ Vergleiche H. HADWIGER, *Über eine fehlende Ungleichung in der Theorie der konvexen Körper*, El. Math. 2, Nr. 3 (1947).

ist, dass die Ecken gemäss unserer Konstruktion nicht *Bildpunkte* sind (Abb. 1).

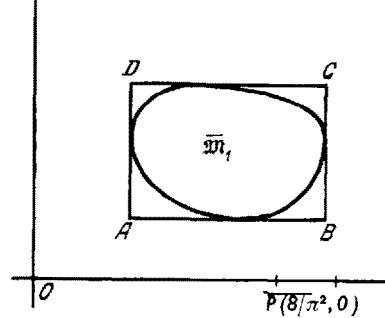


Abb. 1.

Wollen wir nun das Bild der ganzen Menge \mathfrak{M} aller konvexen Rotationskörper von beliebigem l und r erhalten, so haben wir nur φ das Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ durchlaufen zu lassen und die *Vereinigungsmenge* der so erzeugten unendlichen Folge von Rechtecken zu bestimmen¹.

Die Bildrandstücke PQ und QO sind bekannt². Also brauchen wir uns nur noch mit dem Stück OP zu befassen³. Nun berechnet man:

$$\begin{aligned} x &= \frac{16 [1 + \sin^2 \varphi - \pi/4 \cdot \sin(2\varphi)]}{(\pi \sin \varphi + 2 \cos \varphi)^3}; & \dot{x}(0) &= 2; \quad \dot{x}(\pi/2) = 32/\pi^3 \\ y &= \frac{32 \sin \varphi^2 (4 \cos \varphi - \pi \sin \varphi)}{(\pi \sin \varphi + 2 \cos \varphi)^4}; & \dot{y}(0) &= 0; \quad \dot{y}(\pi/2) = -32/\pi^3 \end{aligned}$$

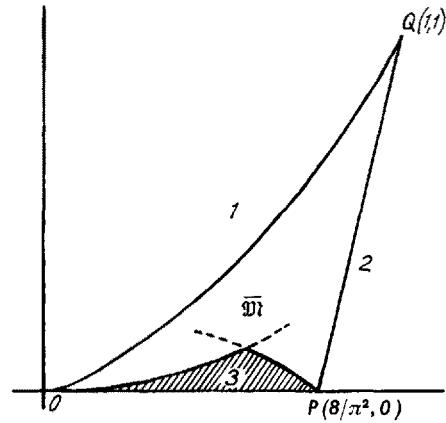


Abb. 2.
1 Kappenkörperkurve 2 Kurve der symmetrischen Kugelzonen
3 unscharfer Rand

x ist im ganzen Intervall $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ positiv; also wächst x monoton.

y besitzt noch genau eine Nullstelle für $\operatorname{tg} \varphi^* = 4/\pi$; deshalb weist y genau ein *nichttriviales Maximum* auf.

¹ Wegen der Invarianz von (3) gegenüber Ähnlichkeit sind wirklich alle konvexen Rotationskörper erfasst worden!

² T. BONNESEN und W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*. Vgl. Abb. 2. – H. HADWIGER, *Beweis einer Extremaleigenschaft der symmetrischen Kugelzone*, Portugalliae Mathematica 7, Fasc. 2 (1948). – G. BOI, *Beweis einer Vermutung von Minkowski*, Abh. math. Seminar der Hamischen Universität 15 (1943).

³ Dass ein solches existieren muss, hat wohl zuerst H. HADWIGER bemerkt.

⁴ = $d/d\varphi$.

Der Punkt A beschreibt also eine Kurve, die bei O waagrecht beginnt, genau einen Scheitel in bezug auf die x -Achse durchläuft und sodann bei P mit der Steigung $dy/dx = -1$ einmündet.

Bei dieser Sachlage wird, wie man sofort erkennt, der gesuchte unscharfe Bildrand beschrieben: In der Umgebung von O durch die *Bahnkurve des Punktes B*; in der Umgebung von P durch die *Bahnkurve des Punktes A* (Abb. 2). Dieser innere Rand wie auch der äussere lassen sich übrigens mit Hilfe von (3) genau diskutieren.

B. Wir betrachten jetzt diejenige Teilmenge \mathfrak{M}_2 aller konvexen Rotationskörper, deren Individuen feste Länge oder *Poldistanz* l und feste Länge der erzeugenden *Meridiankurve* L aufweisen. Es gelten folgende Hilfsätze:

- I. Das grösste Volumen V besitzen Rotationskörper, die durch Rotation einer *elastischen Linie* entstehen¹.
- II. Das kleinste Volumen v besitzen:
 - im Intervall $l \leq L \leq 4l/3$ *Zylinder*,
 - im Intervall $4l/3 < L < \sqrt{2}l$ *spez. Kegelstümpfe*,
 - im Intervall $\sqrt{2}l \leq L < \infty$ *Kegel*².
- III. Die grösste Oberfläche F besitzen die Rotationskörper von an der x -Achse aufgehängten *Kettenlinien* mit einer Länge aus dem Intervall $l \leq L < \infty$.
- IV. Die kleinste Oberfläche f besitzen *Kegelstümpfe*³.
- V. Das grösste Integral der mittleren Krümmung M besitzen *symmetrische Doppelkegel*⁴.
- VI. Das kleinste Integral der mittleren Krümmung m besitzen *Zylinder*⁴.

Die Masszahlen lauten:

$$\begin{aligned}
 \text{II. } l \leq L \leq 4l/3 &\rightarrow v_1 = \frac{\pi l}{4} (L-l)^2, \quad (5) \\
 4l/3 < L < \sqrt{2}l &\rightarrow v_2 = \frac{\pi l}{48} (3L^2 - 4l^2), \quad (4) \\
 \sqrt{2}l \leq L < \infty &\rightarrow v_3 = \frac{\pi l}{12} \left(\frac{L^2 - l^2}{L} \right)^2. \\
 \text{III. } 0 \leq \gamma < \infty; \quad F &= \frac{\pi l^2}{8\gamma^2} [\sin(2\gamma) - 2\gamma]; \\
 L &= \frac{l \cdot \sin \gamma}{\gamma}. \quad (5) \\
 \text{IV. } l \leq L < \infty; \quad f &= \frac{\pi}{2} (L^2 - l^2). \quad (6) \\
 \text{V. } 0 \leq \psi \leq \pi/2; \quad M &= \pi l (\tan \psi \cdot \psi + 1); \\
 L &= l \cdot \sec \psi. \quad (7) \\
 \text{VI. } l \leq L < \infty; \quad m &= \pi \left[\frac{\pi}{2} (L-l) + l \right]. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Durch Kombination von (4), (6) und (7) gewinnt man ein Stück der Bahnkurve des Punktes A in Parameterdarstellung, nämlich:

$$x = \frac{2 \sin^2 \psi}{(\cos \psi + \sin \psi \cdot \psi)^2}; \quad y_1 = \frac{4 \sin^4 \psi \cdot \cos \psi}{(\cos \psi + \sin \psi \cdot \psi)^3}. \quad (9)$$

$\pi/4 \leq \psi \leq \pi/2.$

[Mit Rücksicht auf das Teilintervall für L in (4) und gemäss (7).]

¹ Vergleiche E. CZUBER, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, 2, 5. Abschnitt.

² H. BIERI, *Zwei Minimumprobleme über konvexe Rotationskörper*, El. Math. 9, Nr. 3 (1954).

³ Vergleiche O. BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, und A. KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*.

⁴ H. BIERI, *Ein Minimum-Maximum-Problem über konvexe Rotationskörper*, Commentarii math. helv. 28, Fasc. 2 (1954).

⁵ Das komplizierte V brauchen wir zum Nachweis des inneren Randes nicht!

Weiter benötigt man:

$$\dot{x} = \frac{4 \sin \psi \cdot \cos^2 \psi}{(\cos \psi + \sin \psi \cdot \psi)^3}; \quad \dot{x}(\pi/2) = 0!$$

$$\dot{y} = \frac{4 \sin^3 \psi [4 \cos^3 \psi + \sin \psi \cos^2 \psi \cdot \psi - \sin^2 \psi \cos \psi - \sin^3 \psi \cdot \psi]}{(\cos \psi + \sin \psi \cdot \psi)^4}$$

Es lässt sich beweisen, dass \dot{y} ausser für $\psi = 0$ noch genau eine Nullstelle aufweist, die nicht näher untersucht zu werden braucht¹. Die Bahnkurve von A mündet in P mit der Steigung $dy/dx = -\infty$!

Es wäre durchaus möglich, aus (5), (8) und (4) die Bahnkurve des Punktes B zu kombinieren². Wir wollen diesen Rechnungsaufwand unterlassen und uns mit der Feststellung zufriedengeben, dass vermittels des zweiten, anspruchsvolleren Ansatzes in der *linksseitigen Umgebung* von P eine wesentliche Verbesserung erzielt werden konnte³ (Abb. 3).

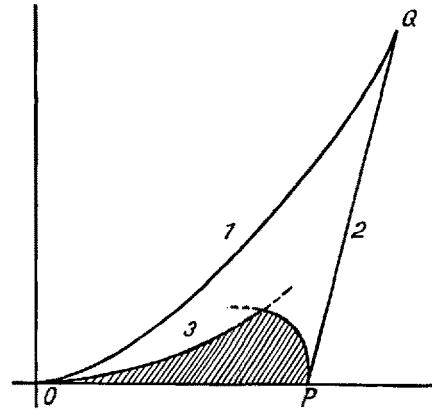


Abb. 3.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass im Blaschke-Diagramm über der x -Achse ein von *Rotationskörperbildpunkten freies Gebiet* existiert. Die noch fehlenden Beziehungen zwischen den 3 Masszahlen können natürlich erst angegeben werden, wenn der exakte Bildrand bekannt ist⁴.

H. BIERI

Bern, den 18. August 1954.

Summary

It is shown that over the distance $0 \leq X \leq 8/\pi^2$ in the diagram, there is a region which is free from picture points («Bildpunkten») of the convex rotation bodies. This assertion is based on two different groupings of the convex rotation bodies into troops, namely at constant length l and constant radius of the equator r , and at constant l and constant length of the resulting meridional curve L . From this, new relations like between the measurements of the convex rotation bodies follow.

¹ Dies wegen der Überschneidung der Bahnkurve von A durch die Bahnkurve von B .

² Man müsste in (7) M durch L ausdrücken, hernach gemäss (5) den Parameter γ einführen und bekäme dann eine Parameterdarstellung sämtlicher Kurven mit γ als Parameter.

³ Leitthrin ist, gestützt auf Resultate von H. HADWIGER, in der Umgebung von P ein neuer, unerwarteter Effekt festgestellt worden. Eine diesbezügliche Publikation wird erscheinen.

⁴ Es ist bemerkenswert, dass mit einfachen Hilfsmitteln Aussagen über das ganze Bild von \mathfrak{M} gemacht werden können. Die Bedeutung dieser Teilergebnisse wäre erheblich grösser, wenn der exakte Bildrand nicht schon teilweise bekannt wäre. Die gleiche Situation hat sich im allgemeinen Problem durch Einführung von Dicke und Durchmesser ergeben, wo leider nicht einmal das längstbekannte unscharfe Randstück $X \leq 1$ ($M^2 - 4\pi F \geq 0$) verbessert werden konnte.